POTENCIAS

Y RAÍCES

6º Curso

MATEMÁTICAS

- Las potencias.
- Potencias de base diez.
- Descomposición en factores primos.
- Potencias aplicadas al m.c.m. y m.c.d.
- Cuadrados de números de dos cifras.
- Raíces cuadradas.
- Raíces cuadradas inexactas.

Cruz de Piedra

Potencias

Los abuelos de Roberto dicen que sus abuelos ya nacieron en nuestra localidad. ¿Cuántas personas de la familia han nacido en la localidad?

Observa en el esquema que cada generación multiplica por dos el número por dos el número de la generación anterior.

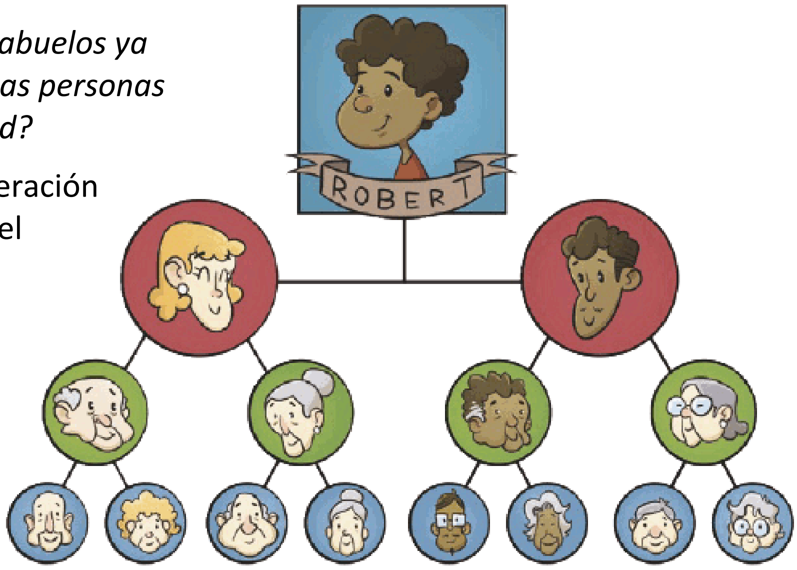
Roberto: 1

Padres: 2 x 1 = 2

Abuelos: 2 x 2 = 4

Bisabuelos: 2 x 2 x 2 = 8

Tatarabuelos: 2 x 2 x 2 x 2 = 16



Un producto de factores iguales se puede escribir en forma de **potencia**.

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{4}$$

exponente: número de veces que se repite el factor.

base: factor que se repite.

El número de personas se puede escribir así:

Roberto: 1 Padres: 2 Abuelos: $2^2 = 4$ Bisabuelos: $2^3 = 8$ Tatarabuelos: $2^4 = 16$

➤ Han nacido 31 personas de la familia en nuestra localidad (1 + 2 + 4 +8 + 16 = 31).

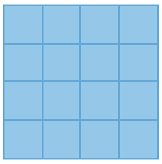
Una **potencia** es un producto de factores iguales, es decir es el resultado de multiplicar un número por él mismo varias veces

¿Cuántos cuadrados hay?

- Multiplicamos lado x lado

  4 x 4 = 16

  $4^2 = 4 \times 4$

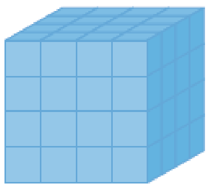


Se lee cuatro elevado al cuadrado (o elevado a dos)

- Multiplicamos lado x lado x lado

  4 x 4 x 4 = 16

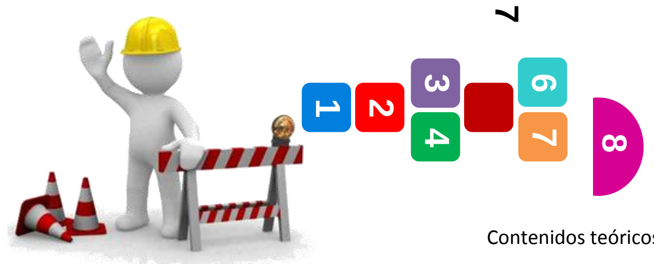
  $4^3 = 4 \times 4 \times 4$



Se lee cuatro elevado al cubo (o elevado a tres)

Multiplicar **dos veces** el mismo número, es hallar el **cuadrado** de ese número.

Multiplicar **tres veces** el mismo número, es hallar el **cubo** de ese número.



Potencias de base diez

Leonor ha hecho un mural sobre el aumento de la población mundial. ¿Cuánto ha aumentado aproximadamente en doscientos años?

En 1800 había 1.000.000.000 de personas.

$1.000.000.000 = 10^9$

En 2000 había 6.000.000.000 de personas.

$6.000.000.000 = 6 \times 10^9$

- La población mundial se ha multiplicado por 6

Una potencia de **base 10** es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente. Para escribir números con varios ceros se utilizan las potencias de 10.

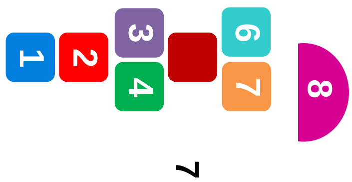
Descomposición polinómica

También se puede **descomponer un número** utilizando **potencias de base 10.** En el caso del número de personas que había en el año 2010:

$$6.864.000.000 = 6 \times 1.000.000.000 + 8 \times 100.000.000 + 6 \times 10.000.000 + 4 \times 1.000.000$$

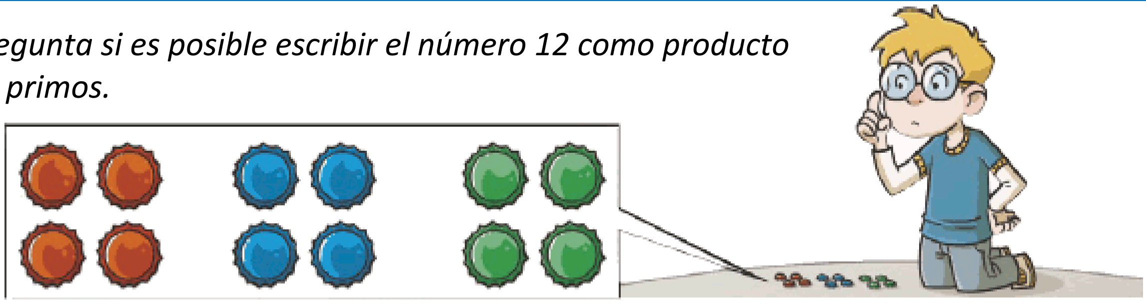
$$6.864.000.000 = 6 \times 10^9 + 8 \times 10^8 + 6 \times 10^7 + 4 \times 10^6$$

Cualquier número se puede escribir como una suma de sus cifras multiplicadas por potencias de base 10, a esto se llama **descomposición polinómica**.



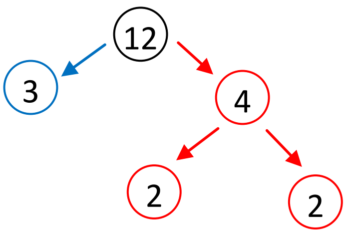
Descomposición en factores primos

Mario se pregunta si es posible escribir el número 12 como producto de números primos.



RECUERDA: Un número primo es el que tienen solo dos divisores: el 1, y él mismo.

■ Observa una forma de hacerlo:



- Buscamos dos números que al multiplicarlos entre sí den 28.
- Por ejemplo: 12 = 3 x 4 ⇨ pero solo es primo 3.
- Seguimos descomponiendo el 4, como producto de otros más pequeños hasta que todos los factores sean primos.
  12 = 3 x 2 x 2
- Escribimos los factores repetidos en forma de potencia.

➤ Por tanto, la descomposición factorial de 12 es $12 = 3 \times 2^2$

■ Sin embargo, él segundo método es más utilizado, veamos cómo se aplica para el nº 12.

Se divide el número sucesivamente por los números primos comenzando por menor, y repitiéndolo si es necesario, hasta llegar a uno.

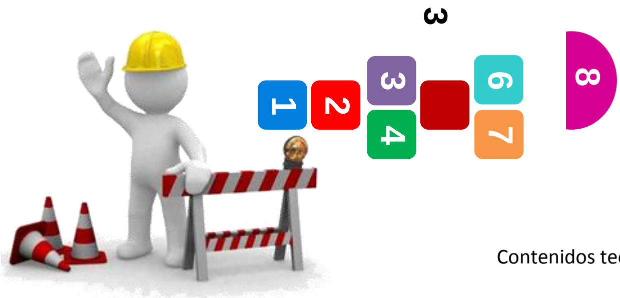
12	② ③ ⑤ ⑦

- Escribimos el nº que vamos a descomponer y trazamos una línea. Luego anotamos los números primos que posiblemente vamos a utilizar
- Comenzamos a dividir el **12** por los números primos, comenzando siempre por el más pequeño posible. El resto ha de ser cero. Observa:

12	2
6	2
3	3
1	

- Doce se puede dividir entre **2**. Lo colocamos a la derecha y la línea, y al dividir 12 entre 2, el resultado es **6**, así que lo colocamos debajo del 12.
- El **6** se puede dividir entre **2**, así que lo ponemos a la derecha, y el resultado, **3**, bajo el 6.
- El **3** se puede dividir entre **3**, así que lo ponemos a la derecha, y el resultado, **1**, bajo el 3.
- Cuando se llega al 1, ya se ha terminado la descomposición. Los números de la derecha son los factores primos. Al multiplicarlos nos da el resultado: $2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3 = 12$

Realizar la **descomposición en factores primos** o **descomposición factorial** de un número es escribirlo como producto de números primos.



Aplicar las potencias al cálculo de m.c.m. *

RECUERDA

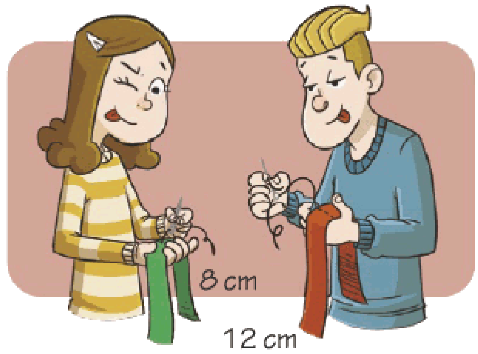
Dos amigos van a tomar el autobús, el de Juan pasa cada 12 minutos y el Antonio cada 30 minutos. Acaban de salir los dos autobuses al mismo tiempo, ¿cuánto tiempo tendrán que esperar para que los dos autobuses vuelvan a salir juntos?

➤ ¿Cómo resolvíamos este problema? Calculando el *mínimo común múltiplo*.

- 1. Múltiplos de 12 y 30 $\begin{cases} 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120,... \\ 30, 60, 90, 120, 150,... \end{cases}$
- 2. Señalamos los comunes: 60, 120,...
- 3. Tomamos el menor: 60

⇨ Tendrán que esperar 60 minutos para que vuelvan a coincidir los dos autobuses.

Iker y Berta necesitan unir cintas del mismo color hasta obtener la misma longitud en las dos. ¿Qué longitud de cinta de cada color conseguirán?



Se puede aplicar potencias para calcular el m.c.m. (8,12)

1. Se descompone el 8 y el 12 en factores primos.

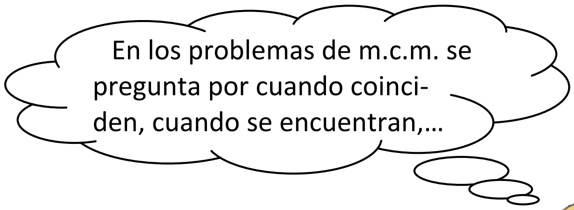
   $8 = 2^3$ $\qquad$ $12 = 2^2 \times 3$

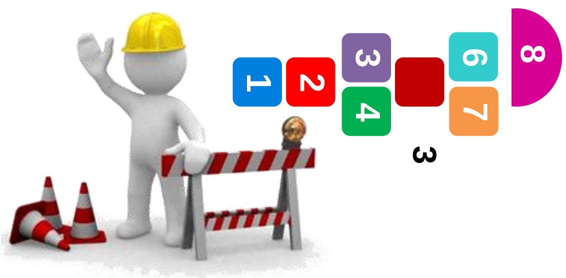
2. El m.c.m. es el producto de los factores con el mayor exponente.

   m.c.m. $(8,12) = 2^3 \times 3 = 24$

➤ Conseguirán 24 cm de cada cinta.

El **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de dos números es **el producto de todos los factores, comunes y no comunes, elevados al mayor exponente**.





Aplicar las potencias al cálculo del m.c.d. *

RECUERDA

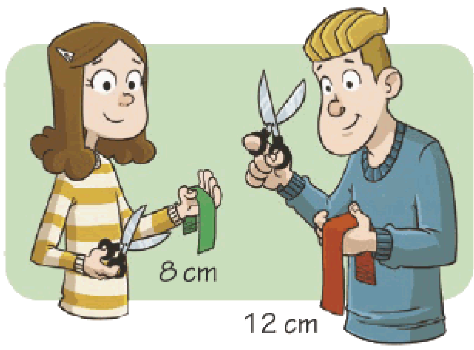
En una floristería tienen 12 claveles y 18 rosas para hacer ramos de flores. Si quieren poner la misma cantidad de flores en cada ramo, sin que les sobre ninguna, ¿de qué forma pondrán más flores en cada ramo?

➤ ¿Cómo resolvíamos este problema? Calculando el máximo común divisor.

- 1. Divisores de 12 y 18 $\begin{cases} 1, 2, 3, 4, 6, 12 \\ 1, 2, 3, 6, 9, 18 \end{cases}$
- 2. Señalamos los comunes: 1, 2, 3 y 6
- 3. Tomamos el mayor: 6

⇨ Pondrán 6 flores en cada ramo.

Iker y Berta necesitan cortar sus cintas en trozos lo más largos posible y del mismo tamaño. ¿Cuánto medirán los trozos?



Se puede aplicar potencias para calcular el m.c.d. (8,12)

1. Se descompone el 8 y el 12 en factores primos.

   $8 = 2^3$ $\qquad$ $12 = 2^2 \times 3$

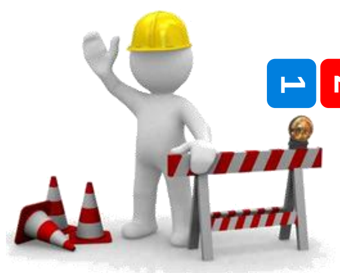
2. El m.c.d. de 8 y 12 es el mayor de los factores primos con el menor exponente.

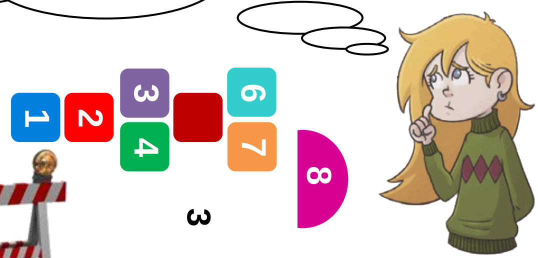
   m.c.d. $(8,12) = 2^2 = 4$

➤ Los trozos medirán 4 cm.

El **máximo común divisor** (m.c.d.) de dos números es **el producto de los factores comunes elevados al menor exponente**. Si no tienen ningún factor común, el m.c.d. de los números es 1.

En los problemas de m.c.d. se pide repartir o dividir algo en los pedazos más largos posible, en la mayor cantidad posible, mayor nº de personas,...





Cuadrados de números de dos cifras

• Cuadrado de las semidecenas

RECUERDA

Para calcular el cuadrado de un número de dos cifras acabos en cinco:

- se multiplican las decenas completas entre las que el número se sitúa:

  25 está entra 20 y 30 ⇨ 20 x 30 = 600

- se le suma el producto de 5 x 5 = 25

➤ Ya tenemos el resultado: $25^2 = 600 + 25 = 625$

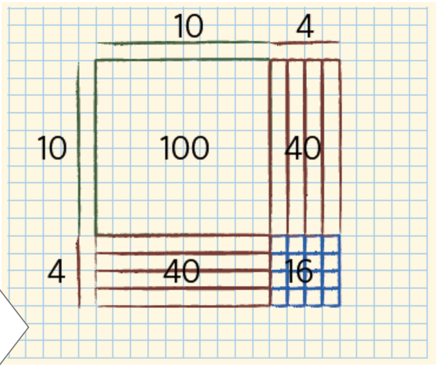
• Cuadrado de números de dos cifras

RECUERDA

Para calcular el cuadrado de un número de dos cifras se halla:

- el cuadrado del 1º;
- más el cuadrado del 2º
- más el doble del 1º por el 2º

	40	3
40	1.600	120
3	120	9



El cuadrado de un número dibujando:
cuadrado del 1º (100) + cuadrado del 2º (16) + doble del 1º x el 2º (160)

Raíces cuadradas

Violeta quiere colocar todas sus macetas en filas formando un cuadrado.
¿Cuántas macetas debe colocar en cada fila?

Como quiere formar un cuadrado debe haber tantas filas como columnas.

49

Hay que encontrar un número que multiplicado por sí mismo dé como resultado 49.

$\boxed{7^2 = 49}$

➤ Debe colocar siete macetas en cada fila.

Como 7 elevado al cuadrado es 49, decimos que **la raíz cuadrada de 49 es 7**.

Se escribe $\boxed{\sqrt{49} = 7}$

La **raíz cuadrada** de un número es otro número que, al elevarlo al cuadrado, es igual al primero.

Radical

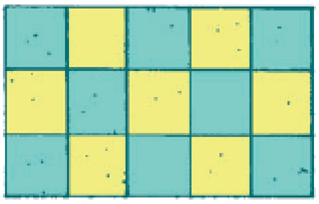
$\sqrt{3\,600} = 60$ porque $60^2 = 60 \times 60 = 3\,600$

Radicando Raíz

En los problemas de raíz cuadrada se pide formar un cuadrado con objetos, un cuadrado con las mismas filas y columnas, hay tantos objetos por caja como cajas tenemos,...

Raíces cuadradas exactas *

Diego debe colocar los 1.849 azulejos de que dispone formando un cuadrado. ¿Cuántos tendrá que colocar en cada lado?



Por tanto debe hallar la raíz cuadrada de 1.849, es decir, buscar un número que multiplicado por él mismo dé 1.849.

Estos son los pasos necesarios para calcular raíces cuadradas exactas cuyo resultado sea el cuadrado de un número con dos cifras.

$30^2 = 900$

$35^2 = 1\,225$

$40^2 = 1\,600$

$45^2 = 2\,025$

$50^2 = 2\,500$

1 Tenemos presente la tabla de "cuadrados perfectos". ¿Entre qué dos resultados está 1.849?.

Está entre 1.600 y 2.025, que corresponden a los cuadrados de 40 y 45.

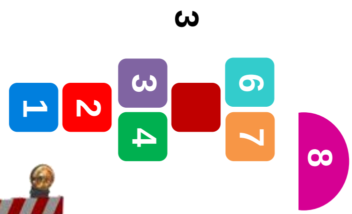
2 Por tanto, $\sqrt{1849}$, tendrá que ser 41, 42, 43 o 44.

3 Fíjate en la cifra de las unidades de 1.849 y de sus posibles raíces:

41 42 43 44 ⟶ El único que al multiplicarlo por sí mismo da 9 es 3.

4 43^2 = 43 x 43 = 1.849, por lo que $\sqrt{1849} = 43$

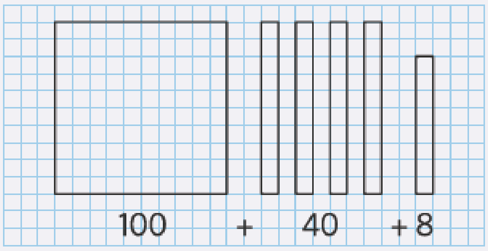
➤ Debe colocar 43 azulejos en el lado.



Obtener una raíz cuadrada de forma gráfica.

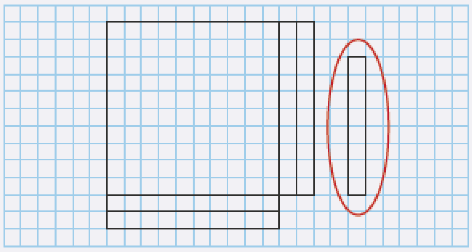
Para números no muy grandes se puede obtener la raíz cuadrada con un dibujo. Observa cómo se hace con el número 148.

1.º Dibujamos en un papel cuadriculado la descomposición del número 148:



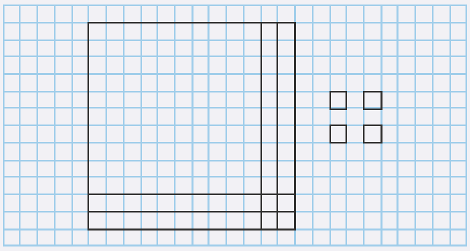
El cuadrado representa el 100, las 4 barras el 40 y los cuadrados sueltos, el 8.

2.º ¿Cómo colocas esos dibujos de modo que formes el cuadrado más grande posible?



Para dibujar completamente el cuadrado faltan 4 piezas.

3.º Dibujamos las piezas necesarias para completar el cuadrado.



El cuadrado más grande que podemos dibujar tiene 12 cuadraditos de lado. Por tanto, $\sqrt{148} = 12$ y de resto 4.

1 Obtén junto con un compañero.

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{169}$

c) $\sqrt{545}$ d) $\sqrt{489}$

Raíces cuadradas inexactas*

Daniel quiere colocar las 40 cartas de la baraja formando un cuadrado. ¿Puede hacerlo sin que le sobre ninguna?

Buscamos un número natural cuyo cuadrado resulte 40.

$6^2 = 36$ $\qquad$ $72 = 4^9$

Pero no hay ningún nº natural cuyo cuadrado sea 40.

➤ No puede colocar las cartas formando un cuadrado sin que le sobre ninguna carta.

■ ¿Cómo puede formar un cuadrado y que le sobre el menor número posible de cartas?

Si coloca 6 cartas a cada lado, forma un cuadrado de $6^2 = 36$ cartas y le sobran 4 cartas.
El número cuyo cuadrado más se acerca a 40, sin pasarse, es 6.

➤ Podrá formar un cuadrado con 6 cartas en cada lado y le sobrarán 4 cartas.

Por tanto, **la raíz cuadrada entera de 40 es 6, con resto 4**. Se escribe $\boxed{\sqrt{40} = 6,\ \text{resto} = 4}$

Daniel ha reunido una colección de 1.076 soldaditos de plomo y quiere colocarlo formando un cuadrado. ¿Cuántos le sobrarán?, ¿cuántos colocaría en cada lado?

Como en el caso anterior, se trata de buscar un número cuyo cuadrado resulte 1.076. Al tratarse de números más grandes hay que proceder de otro modo.

1 En la tabla de "cuadrados perfectos", ¿qué número está cerca, sin pasarse, de 1.076?. Está entre los cuadrados de 30, que es 900, y 35 que es 1.225. Se elige 30, como raíz, y queda un resto de 176. Estos datos se pasan a la tabla, en la 1ª extracción.

$\sqrt{1076}$		
Primera extracción		
Raíz	Cuadrado	Resto
30	900	176

2 Con el resto, 176, se sigue aumentando los lados del cuadrado. Si se completan *dos* filas y *dos* columnas más, serían 120 (30 de cada fila y 30 de cada columna) más 4 cuadraditos, que completan el cuadrado. En total 124, que se quitan de los 176 del resto que había. Estos nuevos datos se pasan a la tabla, en la 2ª extracción.

$\sqrt{1076}$		
Primera extracción		
Raíz	Cuadrado	Resto
30	900	176
Segunda extracción		
+ 2	124	52

3 El nuevo resto es 52. ¿Es posible aumentar los lados del cuadrado?. No porque cada lado tendría ahora 32 y nos pasaríamos. Ya está terminada la raíz cuadrada. Para el resultado final se suman los resultados en las dos primeras columnas y se pone la cifra del resto.

Resultado final		
32	1.024	52

➤ El cuadrado tendría en cada lado 32 soldaditos y le sobrarían 52 soldaditos.